МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Национальный исследовательский
Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского

Н.Р. Стронгина

КУРС «ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ»

Анализ устойчивости и сходимости разностных схем методом разделения переменных

(Модуль 18)

Учебно-методическое пособие

Рекомендовано методической комиссией
Института информационных технологий, математики и механики
для студентов ННГУ, обучающихся по направлению
01.03.02 «Прикладная математика и информатика»

Нижний Новгород
2021

УДК 519.6
ББК 22.19
С-86

С-86 Стронгина Н.Р. Курс «Численные методы»: Анализ устойчивости и сходимости разностных схем методом разделения переменных (Модуль 18): Учебно-методическое пособие. – Нижний Новгород: Нижегородский госуниверситет, 2021. – 25 с.

Рецензент: к.ф.-м.н., доцент **А.А. Перов**

Пособие представляет собой компонент учебно-методического комплекса по дисциплине «Численные методы». На примере одной из модельных задач дисциплины – первой краевой задачи для уравнения теплопроводности – поэтапно рассмотрен теоретический аппарат, необходимый для применения одного из фундаментальных методов анализа разностных схем – метода разделения переменных.

Пособие предназначено для студентов университета, обучающихся по направлению подготовки 01.03.02 «Прикладная математика и информатика», а также для преподавателей.

Ответственный за выпуск:
председатель методической комиссии
Института информационных технологий, математики и механики ННГУ
к.ф.-м.н., доцент А.В. Грезина

УДК 519.6
ББК 22.19

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Развитие вычислительной техники и последующее развитие высокопроизводительных вычислительных систем открывают качественно новые возможности изучения сложных реальных объектов методами вычислительного эксперимента [11, 12].

Машинный вычислительный эксперимент как новый метод научного исследования предполагает дискретизацию исходной задачи. Он требует специальной проработки численного алгоритма: корректность, устойчивость, точность, сходимость. Поэтому на современном этапе подготовки выпускников по направлению «Прикладная математика и информатика» основной целью освоения дисциплины «Численные методы» является изучение фундаментальных принципов построения численных алгоритмов, подходов к анализу их свойств, подготовка студентов к разработке и применению эффективных вычислительных комплексов, необходимых для математического моделирования сложных систем.

В Институте информационных технологий, математики и механики ННГУ в системе подготовки бакалавров по указанному выше направлению дисциплина «Численные методы» изучается на 3-м курсе в течение двух семестров. Обучение включает лекции, практические и лабораторные занятия, самостоятельную работу, зачеты и экзамен. Содержание дисциплины соответствует требованиям федеральных государственных образовательных стандартов и обновляется с учетом проблематики научных исследований и технологий программирования. Фундаментальные основы курса соответствует требованиям типовой программы по направлению «Прикладная математика и информатика», разработанной под руководством академика РАН А.А. Самарского [13].

Курс содержит изучение основ машинной арифметики, анализ структуры погрешности, подходы и методы приближенного вычисления функций, численное дифференцирование и интегрирование, численное решение систем линейных алгебраических уравнений, задач на собственные значения, решение нелинейных алгебраических уравнений и систем. Особое внимание уделяется инструментам математического моделирования сложных систем: методам численного решения задачи Коши и краевых задач для обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ), решению уравнений в частных производных, а также структуре соответствующих вычислительных комплексов.

В связи с успешным применением в ННГУ практико-ориентированного подхода и на основе принципа «образование как исследование», вытекающего из положения Гумбольдта «образование на основе исследований» [11], фундаментальный курс «Численные методы» имеет в ННГУ уровневую структуру. С одной стороны, в нем представлены все основные разделы численного анализа. С другой стороны, актуальные приложения требуют одновременного использования разных методов. Поэтому основой курса является системное изучение модельных задач, описывающих свойства реальных объектов различной природы. Освоение разделов дисциплины построено таким образом, чтобы в течение каждого семестра студенты могли самостоятельно подготовить программную реализацию численного алгоритма для решения модельной задачи, провести вычислительный эксперимент и подготовить отчет.

Нижегородский государственный университет является участником Суперкомпьютерного консорциума университетов России [12]. Студентов 3-го курса, изучающих дисциплину «Численные методы», знакомят с подходами к организации параллельных вычислений. Глубокое изучение этих подходов опирается на тот же комплект модельных задач, но проводится на старших курсах после освоения дисциплин, посвященных технологиям и методам параллельного программирования.

При освоении курса «Численные методы» у студентов 3-го курса должны быть сформированы компетенции разработки и применения программных средств разного уровня сложности. Поэтому требования к программам, подготовленным студентами, также реализуют практико-ориентированный подход. Программа должна быть написана на алгоритмическом языке высокого уровня. Код, реализующий алгоритм, должен быть подготовлен студентом самостоятельно. Объектно-ориентированный подход приветствуется. Программа и способ работы с ней должны быть пригодны не только для выполнения конкретного расчета, но также для проверки корректной реализации метода и результатов вычислительного эксперимента, и затем для изучения свойств метода и свойств моделируемого объекта. Ряд заданий выполняются с помощью специальной программы-тренажера, затем – с помощью программы, подготовленной студентом.

Требования самостоятельной программной реализации алгоритма и последующего самостоятельного проведения вычислительного эксперимента предполагают, что при рассмотрении теоретического материала, проведении практических занятий, выполнении заданий в рамках самостоятельной работы необходимо уделить больше внимания анализу понятийного аппарата дисциплины, доказательной базе, рассмотрению «простых» примеров и разбору по шагам решений специально подобранных задач. Решение именно этой учебной задачи поддерживает предлагаемое пособие.

Изучение тематического модуля, представленного в пособии, опирается на дисциплины «Дифференциальные уравнения», «Математический анализ», «Геометрия и алгебра» и «Программирование на ЭВМ» и осуществляется одновременно с изучением дисциплин «Уравнения математической физики» и «Функциональный анализ».

Нумерация разделов пособия соответствует установленной в настоящее время нумерации тематических модулей электронного учебного курса «Численные методы», представленного в системе электронного обучения ННГУ (СЭО ННГУ) на базе платформы Moodle. В период весеннего семестра 2019-20 учебного года и осеннего семестра 2020-21 учебного года дистанционная организация учебного процесса по дисциплине «Численные методы» выстраивалась на базе этого электронного курса [14].

Пособие предназначено для студентов университета, обучающихся по направлению подготовки 01.03.02 «Прикладная математика и информатика», изучающих курс «Численные методы», и преподавателей.

Материал пособия может быть полезен студентам, изучающим в вузе численные методы на различных направлениях подготовки, а также студентам магистратуры ИИТММ, изучающим параллельные численные методы на основе технологий параллельного программирования.

Модуль 18. Анализ устойчивости и сходимости разностных схем методом разделения переменных

18.1. Постановка задачи

Рассмотрим нестационарное уравнение теплопроводности

$$u'_t(x,t) = u''_{xx}(x,t) + f(x,t) \text{ при } x \in (0,\,1),\ t \in (0,\,T\,] \tag{1.1}$$

с граничными условиями

$$u\,(0,t) = \mu_1(t),\ \ u\,(1,t) = \mu_2(t) \tag{1.2}$$

и начальным условием

$$u(x,0) = \varphi(x)\,. \tag{1.3}$$

Введем сетку размерности (n, m), равномерную по каждому из аргументов x, t. Здесь n – число разбиений по x, m – число разбиений по t. Шаг по x обозначим h и определим как $h = 1/n$. Шаг по t обозначим τ и определим как $\tau = T\,/m$. Пары значений (x_i, t_j), где $x_i = i\,h$, $i = 0,\ldots n$, $t_j = j\,\tau$, $j = 0,\ldots m$, назовем узлами сетки. Решение задачи (1.1)-(1.3) в узлах сетки обозначим через u и рассматриваем u как сеточную функцию: $u = \{u_{ij}\}$, $i = 0,\ldots n$, $j = 0,\ldots m$.

Для построения численного решения задачи (1.1)-(1.3) используем явную разностную схему. Она включает уравнения

$$\frac{v_{ij+1} - v_{ij}}{\tau} = [v_{x\bar{x}}]_{ij} + f_{ij},\ \ i=1,\ldots n\text{-}1,\, j=0,\ldots m\text{-}1, \tag{2.1}$$

апроксимирующие дифференциальное уравнение (1.1), уравнения

$$v_{0j} = \mu_1(t_j),\ \ v_{nj} = \mu_2(t_j),\ \ j = 1,\ldots m \tag{2.2}$$

апроксимирующие граничные условия (1.2), и уравнения

$$v_{i0} = \varphi(x_i),\, i = 0,\ldots n\,, \tag{2.3}$$

апроксимирующие начальное условие (1.3).

В уравнениях (2.1) через $[v_{x\bar{x}}]_{ij}$ обозначен разностный оператор

$$[v_{x\bar{x}}]_{ij} = \frac{v_{i-1j} - 2v_{ij} + v_{i+1j}}{h^2}\,.$$

Решение разностной схемы (2.1)-(2.3) обозначим через v, оно определяется в узлах сетки и является сеточной функцией: $v = \{v_{ij}\}$, $i = 0,\ldots n$, $j = 0,\ldots m$.

Определение. Узлы сетки, соответствующие фиксированному значению t, называют слоем. Узлы, соответствующие t_j, называют слоем j.

Используя (2.3) для отыскания v на нулевом слое и выражая значения v на слое j+1 через значения v на слое j, а именно,

$$v_{ij+1} = v_{ij} + \tau[v_{x\bar{x}}]_{ij} + \tau f_{ij},\ \ i=1,\ldots n\text{-}1,\, j=0,\ldots m\text{-}1,$$

схему (2.1)-(2.3) можно решить послойно и найти v. При этом найденное v рассматривается как некоторое приближение к неизвестной сеточной функции u.

Определение. Погрешностью решения задачи (1.1)-(1.3) с помощью схемы (2.1)-(2.3) называют сеточную функцию z, которую определяют как $z = u - v$, где u – точное решение (1.1)-(1.3), v – точное решение (2.1)-(2.3), u, v – сеточные функции.

Таким образом, $z = \{z_{ij}\}$, $i = 0,\ldots n, j = 0,\ldots m$. В узле (x_i, t_j) погрешность z принимает значение $z_{ij} = u_{ij} - v_{ij}$, $i = 0,\ldots n, j = 0,\ldots m$. «Величину» погрешности z характеризует ее норма: $\| z \|$.

Определение. Говорят, что решение разностной схемы (2.1)-(2.3) сходится к решению задачи (1.1)-(1.3), если при $n\to\infty$, $m\to\infty$ (то есть при сгущении сетки), норма погрешности z стремится к нулю:

$$\lim_{\substack{n\to\infty \\ m\to\infty}} \| z \| = 0.$$

Так как сеточная функция u в общем случае неизвестна, погрешность z в общем случае также неизвестна, и для изучения сходимости полезно рассмотреть еще одну погрешность, которую называют *погрешностью аппроксимации* ψ.

Определение. Погрешностью аппроксимации ψ называют невязку разностной схемы (2.1)-(2.3) на решении задачи (1.1)-(1.3) (то есть в выражения для невязки каждого из уравнений разностной схемы вместо v подставляют u).

Таким образом, $\psi = \{\psi_{ij}\}$, $i = 0,\ldots n, j = 0,\ldots m$, где компоненты

$$\begin{aligned} \psi_{0j} &= u_{0j} - \mu_1(t_j),\ \ j = 0,\ldots m, \\ \psi_{nj} &= u_{nj} - \mu_2(t_j),\ j = 0,\ldots m, \end{aligned} \tag{3.1}$$

показывают, как разностная схема аппроксимирует граничные условия исходной задачи, компоненты

$$\psi_{i0} = u_{i0} - \varphi_i,\ i = 1,\ldots n-1, \tag{3.2}$$

показывают, как схема аппроксимирует начальное условие, и компоненты

$$\psi_{ij+1} = \frac{u_{ij+1} - u_{ij}}{\tau} - [u_{x\bar{x}}]_{ij} - f_{ij},\ i = 1,..n-1,\ j = 0,\ldots m-1, \tag{3.3}$$

где через $[u_{x\bar{x}}]_{ij}$ обозначен оператор

$$[u_{x\bar{x}}]_{ij} = \frac{u_{i-1j} - 2u_{ij} + u_{i+1j}}{h^2},$$

показывают, как схема аппроксимирует основное (дифференциальное) уравнение исходной задачи.

Погрешность аппроксимации ψ может рассматриваться как сеточная функция и имеет следующие свойства.

Утверждение 1 (об оценках ψ). Если решение задачи (1.1)-(1.3) существует, единственно и является достаточно гладким, разностная схема (2.1)-(2.3) аппроксимирует граничные условия (1.2) абсолютно точно:

$$\psi_{0j} = 0,\ j = 1,\dots m,$$
$$\psi_{nj} = 0,\ j = 1,\dots m, \qquad (4.1)$$

аппроксимирует начальные условия (1.3) абсолютно точно:

$$\psi_{i0} = 0,\ i = 1,\dots n-1, \qquad (4.2)$$

и аппроксимирует основное уравнение (1.1) при $h \to 0$, $\tau \to 0$ со вторым порядком малости по h, с первым порядком малости по τ:

$$\left|\ \psi_{ij}\ \right| \le \hat{M}_1 h^2 + \hat{M}_2 \tau,\ \ i = 1,\dots n-1, j = 1,\dots m, \qquad (4.3)$$
$$\hat{M}_1 = \frac{1}{12} \cdot \max_{(x,t)\in \overline{G}} \left| u^{IV}_{xxxx}(x,t) \right|,\ \hat{M}_2 = \frac{1}{2} \cdot \max_{(x,t)\in \overline{G}} \left| u^{II}_{tt}(x,t) \right|.$$

Замечание. Значения $\hat{M}_1$, $\hat{M}_2$ одинаковы для всех индексов *i, j,* указанных в неравенствах (4.3), и не зависят от h, τ, то есть не зависят от выбора (n, m) – размерности сетки.

Значения $\hat{M}_1$, $\hat{M}_2$ зависят от исходной задачи (1.1)-(1.3), а именно, от частных производных ее решения.

Утверждение 2 (об уравнениях для z и ψ). Для пары задач (1.1)-(1.3) и (2.1)-(2.3) погрешности z и ψ связаны уравнениями

$$\frac{z_{ij+1} - z_{ij}}{\tau} = [z_{x\bar{x}}]_{ij} + \psi_{ij+1},\ \ i{=}1,\dots n{-}1, j{=}0,\dots m{-}1 \qquad (5.1)$$

$$z_{0j} = \psi_{0j} = 0,\ \ z_{nj} = \psi_{nj} = 0,\ \ j = 1,\dots m \qquad (5.2)$$

$$z_{i0} = \psi_{i0} = 0, i = 0,\dots n\,. \qquad (5.3)$$

структура которых аналогична уравнениям (2.1)-(2.3). В уравнениях (5.1) через $[z_{x\bar{x}}]_{ij}$ обозначен оператор

$$[z_{x\bar{x}}]_{ij} = \frac{z_{i-1j} - 2z_{ij} + z_{i+1j}}{h^2}\ .$$

Замечание.Утверждение 1 показывает, что неизвестная ψ может быть оценена (через модули частных производных неизвестного точного решения решения исходной задачи) и стремится к нулю при сгущении сетки. Утвеждение 2 подсказывает, как оценить z, используя оценки для ψ.

Сходимость решения разностной схемы (2.1)-(2.3) к решению задачи (1.1)-(1.3) устанавливает следующая теорема.

Теорема (о сходимости). Пусть решение (1.1)-(1.3) существует, единственно и является достаточно гладким. При $h \to 0$, $\tau \to 0$ и выполнении условия

$$0 < \tau < \frac{h^2}{2} \qquad (6)$$

решение разностной схемы (2.1)–(2.3) сходится к решению задачи (1.1)-(1.3) со вторым порядком малости по h, первым порядком малости по τ в смысле *стремления к нулю среднего квадрата погрешности z на каждом слое*:

$$\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n-1} z_{ij}^2}{n-1}} \le T(\hat{M}_1 h^2 + \hat{M}_2 \tau),\ j = 1,\ldots m \quad (7.1)$$

(константы $\hat{M}_1$, $\hat{M}_2$ такие же, как в (4.3) и не зависят от h, τ). В узлах, соответствующих границе, решение разностной схемы совпадает с решением исходной задачи:

$$\begin{aligned} z_{0j} &= 0,\ j = 1,\ldots m, \\ z_{nj} &= 0,\ j = 1,\ldots m, \end{aligned} \quad (7.2)$$

и на начальном слое решение разностной схемы также совпадает с решением исходной задачи:

$$z_{i0} = 0,\ i = 0,\ldots n. \quad (7.3)$$

Доказательство включает следующие этапы:

1. Определение пространства R_{n+1}^{n-1} для послойной записи схемы в векторном виде.
2. Выбор базиса в R_{n+1}^{n-1}.
3. Определение оператора $\{V\}_{x\bar{x}}$ в R_{n+1}^{n-1}.
4. Обоснование условия устойчивости схемы (анализ первой вспомогательной задачи).
5. Комментарии у условию устойчивости.
6. Доказательство теоремы об устойчивости явной разностной схемы по правой части и начальным условиям (анализ второй вспомогательной задачи). Следствие из теоремы.
7. Завершение доказательства сходимости и получение (7.1)-(7.3).

Перейдем к доказательству.

18.2. Пространство для работы на слое

Определим R_{n+1}^{n-1} как пространство векторов, имеющих n+1 компоненту (нумеруем их от 0 до n), таких, что начальная и последняя компоненты вектора (то есть компоненты с номерами 0 и n) являются нулевыми:

$$V = (v_0, v_1,\ldots v_{n-1}, v_{nj}) = (0, v_1, v_2,\ldots v_{n-1}, 0) \in R_{n+1}^{n-1} \quad .$$

Очевидно, что размерность R_{n+1}^{n-1} равна n-1.

Определим в R_{n+1}^{n-1} скалярное произведение и норму:

$$(V,W)_{R_{n+1}^{n-1}} = \sum_{i=0}^{n} v_i w_i = \sum_{i=1}^{n-1} v_i w_i \quad ,$$

где $V = (v_0, v_1, ... v_{n-1}, v_n) \in R_{n+1}^{n-1} \quad W = (w_0, w_1, .. w_{n-1}, w_n) \in R_{n+1}^{n-1}$.

$$\|V\|_{R_{n+1}^{n-1}} = \sqrt{(V,V)_{R_{n+1}^{n-1}}} = \sqrt{\sum_{i=0}^{n} v_i^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n-1} v_i^2} .$$

18.3. Выбор базиса в пространстве, отвечающем за слой

Рассмотрим задачу Штурма-Лиувилля:

$$\begin{gathered} -u''(x) = \lambda u(x) \text{ при } x \in (0,\, 1) \\ u(0) = 0,\ u(1) = 0 . \end{gathered} \tag{8}$$

Ее решений бесконечно много: собственным числам $\lambda_k = (\pi k)^2, k = 1, 2, ...$ соответствуют (с точностью до произвольного ненулевого множителя) собственые функции $u^{(k)}(x) = sin\,(\pi k x), k = 1, 2, ...$.

Рассмотрим разностный аналог задачи (8). Для этого на отрезке $x \in [0, 1]$ вводим сетку, равномерную по *x*: *n* – число разбиений, *h* – шаг сетки, $h = 1/n$, значения $x_i = i\,h$, $i = 0, \dots n$, являются узлами сетки.

Задаче (8) сопоставим систему разностных уравнений

$$\begin{gathered} -\frac{v_{i-1} - 2v_i + v_{i+1}}{h^2} = -[v_{x\bar{x}}]_i = \lambda v_i ,\quad i = 1, \dots n-1, \\ v_0 = 0,\ v_n = 0. \end{gathered} \tag{9}$$

которая, в свою очередь, может быть записана как задача на отыскание собственных чисел и собственных векторов для симметричной трехдиагональной матрицы в евклидовом пространстве R^{n-1} :

$$\begin{pmatrix} 2n^2 & -n^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -n^2 & 2n^2 & -n^2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & ... & ... & ... & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & ... & ... & ... & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & ... & ... & .. & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -n^2 & 2n^2 & -n^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -n^2 & 2n^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ ... \\ ... \\ ... \\ v_{n-2} \\ v_{n-1} \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ ... \\ ... \\ ... \\ v_{n-2} \\ v_{n-1} \end{pmatrix} \tag{10}$$

Непосредственно подстановкой нетрудно проверить, что решением (10) являются собственные числа

$$\lambda_k = \frac{4}{h^2} sin^2\left(\frac{\pi k}{2n}\right), k = 1, n\text{-}1,$$

и собственные векторы

$$v^{(k)}(x) = \left(sin\,\pi k x_1, sin\,\pi k x_2, \ldots sin\,\pi k x_{n-1}\right), k = 1, n\text{-}1.$$

Собственные векторы будем символически записывать в виде

$$v^{(k)}(x) = sin(\pi k x) \in R^{n-1}, k = 1, \ldots n-1.$$

Так как все собственные числа задачи (10) различны, собственные векторы $v^{(k)}(x) \in R^{n-1}, k = 1, \ldots n-1,$ ортогональны (потому что соответствуют различным собственным числам) и образуют в R^{n-1} ортогональный базис.

Очевидно, что решением задачи (9) будут те же собственные числа

$$\lambda_k = \frac{4}{h^2} sin^2\left(\frac{\pi k}{2n}\right), k = 1, n\text{-}1, \tag{11.1}$$

и (с точностью до произвольного ненулевого множителя) собственные векторы (сеточные функции)

$$v^{(k)}(x) = \left(0, sin\,\pi k x_1, sin\,\pi k x_2, \ldots sin\,\pi k x_{n-1}, 0\right) \in R_{n+1}^{n-1}, k = 1, \ldots n-1.$$

Так как $sin\,\pi k x_0 = 0$ и $sin\,\pi k x_n = 0$, указанные векторы записываем в виде

$$v^{(k)}(x) = \left(sin\,\pi k x_0, sin\,\pi k x_1, sin\,\pi k x_2, \ldots sin\,\pi k x_{n-1}, sin\,\pi k x_n\right)$$

и используем указанную выше символическую запись

$$v^{(k)}(x) = sin(\pi k x) \in R_{n+1}^{n-1}, k = 1, \ldots n-1, \tag{11.2}$$

рассматривая данные векторы как элементы R_{n+1}^{n-1}.

Утверждение 3 (о базисе). В пространстве R_{n+1}^{n-1} собственные векторы (сеточные функции) $v^{(k)}(x) = sin(\pi k x), k = 1, \ldots n-1,$ образуют ортогональный базис: $\left(v^{(k)}, v^{(p)}\right)_{R_{n+1}^{n-1}} = 0$ при $k \neq p$.

Замечание. Далее собственные числа (11.1) и собственные векторы (11.2) называем соответственно собственными числами и собственными векторами задачи (9).

18.4. Оператор $\{V\}_{x\bar{x}}$ в пространстве, отвечающем за слой

Определим в пространстве R_{n+1}^{n-1} оператор $\{V\}_{x\bar{x}}$. Рассмотрим $V \in R_{n+1}^{n-1}$

$$V = (v_0, v_1, \ldots v_{n-1}, v_n) = (0, v_1, v_2, \ldots v_{n-1}, 0). \tag{12.1}$$

Результат применения $\{V\}_{x\bar{x}}$ к вектору V обозначим через W:

$$W=\{V\}_{x\bar{x}}\,,\ W=(w_0,\,w_1,..w_{n-1},w_n). \qquad (12.2)$$

Компоненты W определим следующим образом:

$$w_0=0,$$

$$w_i=\frac{v_{i-1}-2v_i+v_{i+1}}{h^2},\ i=1,\ldots n\text{-}1, \qquad (12.3)$$

$$w_n=0.$$

Очевидно, результат применения $\{V\}_{x\bar{x}}$ к вектору $V\in R_{n+1}^{n-1}$ принадлежит R_{n+1}^{n-1}, так как начальная и последняя компоненты W являются нулевыми:

$$W=(w_0,\,w_1,..w_{n-1},w_n\,)=(0,\,w_1,...w_{n-1},0)\in R_{n+1}^{n-1}\quad .$$

Пример. Применить $\{V\}_{x\bar{x}}$ к $V=(0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 0)$. Решение: здесь $n=4$, $h=0.25$, $W=(w_0,\,w_1,w_2,w_3\;,w_4)\in R_5^3$ и

$$W=(0,\frac{0-2+2}{0.625},\frac{1-2\cdot 2+3}{0.625},\frac{2-2\cdot 3+0}{0.625},0)=(0,0,0,-64,0).$$

Далее для доказательства сходимости схемы потребуется следующее свойство.

Утверждение 4 (о разложении по базису). Пусть $V\in R_{n+1}^{n-1}$ раскладывается по базису из собственных векторов задачи (9) в виде

$$V=\sum_{k=1}^{n-1}\alpha_k v^{(k)} \qquad (13)$$

Тогда результат применения оператора $\{V\}_{x\bar{x}}$ к вектору V имеет вид:

$$W=\{V\}_{x\bar{x}}=-\sum_{k=1}^{n}\alpha_k\lambda_k v^{(k)}\quad . \qquad (14)$$

Доказательство. Проверим выполнение (14) для каждой компоненты вектора W, то есть для каждого $i=0,\ldots n$, проверим выполнение равенств

$$w_i=-\sum_{k=1}^{n}\alpha_k\lambda_k v_i^{(k)}\ .$$

Для $w_0=0$ получим

$$-\sum_{k=1}^{n-1}\alpha_k\lambda_k v_0^{(k)}=-\sum_{k=1}^{n-1}\alpha_k\lambda_k\,sin(\pi k x_0)=0\,.$$

Для $w_n=0$ получим

$$-\sum_{k=1}^{n-1}\alpha_k\lambda_k v_n^{(k)} = -\sum_{k=1}^{n-1}\alpha_k\lambda_k \sin(\pi k x_n) = 0\,.$$

Для компонент w_i ($i = 1,\ldots n$-1) получим

$$w_i = \frac{v_{i-1} - 2v_i + v_{i+1}}{h^2} = \frac{1}{h^2}\left(\sum_{k=1}^{n-1}\alpha_k v_{i-1}^{(k)} - 2\sum_{k=1}^{n-1}\alpha_k v_i^{(k)} + \sum_{k=1}^{n-1}\alpha_k v_{i+1}^{(k)}\right) =$$

$$= \frac{1}{h^2}\sum_{k=1}^{n-1}\alpha_k\left(v_{i-1}^{(k)} - 2v_i^{(k)} + v_{i+1}^{(k)}\right) = -\sum_{k=1}^{n-1}\alpha_k\lambda_k v_i^{(k)}.$$

что и требовалось доказать.

18.5. Условие устойчивости схемы

Рассмотрим уравнение

$$u_t'(x,t) = u_{xx}''(x,t) \text{ при } x\in (0,\,1),\, t\in (0,\,+\infty) \qquad (15.1)$$

с граничными условиями

$$u(0,t) = 0,\;\; u(1,t) = 0, \qquad (15.2)$$

и начальным условием

$$u(x,0) = \sin \pi k x. \qquad (15.3)$$

(k – некоторое фиксированое натуральное число).

Назовем (15.1)-(15.3) *первой вспомогательной задачей.* Ее решением является функция

$$u(x,t) = e^{-(\pi k)^2 t}\sin \pi k x. \qquad (16)$$

Для $\forall x \in [0,\,1]$ решение (16) имеет свойство

$$\lim_{t\to+\infty} u(x,t) = 0. \qquad (17.1)$$

Кроме того, имеется свойство

$$\lim_{t\to+\infty}\max_{x\in[0,1]}\left| u(x,t)\right| = 0. \qquad (17.2)$$

Уравнения (15.1)-(15.3) моделируют динамику распределения температуры тонкого однородного стержня единичной длины, на границах которого постоянно поддерживается нулевая температура, а начальное распределение температур соответствовало гармонике $\sin \pi k x$.

Свойства (17.1)-(17.2) означают, что, во-первых, в любой точке стержня с течением времени температура стремится к нулевой, и во-вторых, максимальная температура на стержне с течением времени также стремится к нулю.

Выясним, при каких условиях численные решения данной задачи, полученные с помощью явной разностной схемы, будут иметь свойства, аналогичные свойствам решения дифференциальной задачи (15.1)-(15-3) и описываемого ею физического явления.

Численное решение будем строить на сетке с числом разбиений по x, равным n, с шагом по x, равным h ($h = 1/n$). Так как в поставленной задаче t не ограничено, используем по t некоторый постоянный шаг, равный τ ($\tau > 0$). Узлы сетки записываем в виде (x_i, t_j), где $x_i = ih$, $i = 0,...n$, $t_j = j\tau$, $j = 0, 1, 2…$, причем при $j \to +\infty$ $t_j \to +\infty$.

Для задачи (15.1)-(15.3) явная разностная схема включает уравнения

$$\frac{v_{ij+1} - v_{ij}}{\tau} = [v_{x\bar{x}}]_{ij}, \ i=1,…n-1, j=0, 1, 2… \tag{18.1}$$

аппроксимирующие дифференциальное уравнение (15.1), уравнения

$$v_{0j} = 0, \ v_{nj} = 0, \ j = 1,...m \tag{18.2}$$

апроксимирующие граничные условия (15.2), и уравнения

$$v_{i0} = sin\, \pi k x_i, i = 0,...n\,. \tag{18.3}$$

аппроксимирующие начальное условие (15.3).

В уравнениях (18.1) через $[v_{x\bar{x}}]_{ij}$ обозначен разностный оператор

$$[v_{x\bar{x}}]_{ij} = \frac{v_{i-1j} - 2v_{ij} + v_{i+1j}}{h^2}\,.$$

Исследуем решение схемы (18.1)-(18.3) в случае, когда $k \in \{1,...n-1\}$[1] и проверим у него наличие свойств, аналогичных (17.1) и (17.2), а именно:

$$\forall i = 0,...n \lim_{j \to +\infty} v_{ij} = 0. \tag{19.1}$$

$$\lim_{j \to +\infty} \max_{i=0,...n} \left| v_{ij} \right| = 0. \tag{19.2}$$

Для этого запишем (18.1)-(18.3) в векторном виде в пространстве R_{n+1}^{n-1} и получим в явном виде формулу для ее решения. Введем необходимые обозначения.

Решение схемы на слое j обозначим через V_j

$$V_j = (v_{0j}, v_{1j},...v_{n-1j}, v_{nj}), \ j = 0,...m\,.$$

В силу нулевых граничных условий (18.2) V_j есть вектор из R_{n+1}^{n-1}:

$$V_j = (0, v_{1j},...v_{n-1j}, 0) \in R_{n+1}^{n-1} \quad j = 0,...m$$

Из (18.3) следует, что решение схемы на начальном слое имеет вид

$$V_0 = (sin\,\pi k x_0, sin\,\pi k x_1,...sin\,\pi k x_{n-1}, sin\,\pi k x_n)$$

в силу нулевых граничных условий является вектором из R_{n+1}^{n-1}:

$$V_0 = (0, sin\,\pi k x_1,...sin\,\pi k x_{n-1}, 0) \in R_{n+1}^{n-1}$$

Так как $k \in \{1,...n-1\}$, V_0 совпадает с одной из собственных функций задачи (9):

$$V_0 = sin\,\pi k x = v^{(k)}$$

[1] Случай $k \geq n$ прокомментирован в следующем пункте.

Из (18.1), (18.2) следует, что решение на слое j+1 можно найти на основе решения на – слое j (предыдущем слое):

$$v_{0j+1} = 0$$

$$v_{ij+1} = v_{ij} + \tau \frac{v_{i-1j} - 2v_{ij} + v_{i+1j}}{h^2}, \; i=1,\ldots n-1,$$

$$v_{nj+1} = 0.$$

С учетом введенных обозначений данные уравнения принимают вид:

$$V_{j+1} = V_j + \tau\{V_j\}_{x\bar{x}}, \;\; \mathrm{j} = 0, 1, 2...$$

где $\{V_j\}_{x\bar{x}}$ определен в соответствии с (12.1)-(12.3).

Таким образом, при $k \in \{1,...n\text{-}1\}$ разностная схема (18.1)–(18.3) записывается в пространстве R_{n+1}^{n-1} в векторном виде

$$V_{j+1} = V_j + \tau\{V_j\}_{x\bar{x}}, \;\; \mathrm{j} = 0, 1, 2... . \tag{20.1}$$

$$V_0 = sin\,\pi kx = v^{(k)} \tag{20.2}$$

Утверждение 5. Решение задачи (20.1)-(20.2) на слое j имеет вид

$$V_j = \left(1 - \tau\lambda_k\right)^j v^{(k)} \tag{21}$$

где λ_k – собственное число задачи (9), соответствующее собственной функции $v^{(k)}$.

Доказательство (идея). Найдем решение задачи (20.1)-(20.2)

Так как

$$\{V_0\}_{x\bar{x}} = \{v^{(k)}\}_{x\bar{x}} = -\lambda_k v^{(k)}$$

на первом слое получим

$$V_1 = V_0 + \tau\{V_0\}_{x\bar{x}} = v^{(k)} - \tau\lambda_k v^{(k)} = \left(1 - \tau\lambda_k\right)v^{(k)} \;.$$

Так как

$$\{V_1\}_{x\bar{x}} = \{\left(1 - \tau\lambda_k\right)v^{(k)}\}_{x\bar{x}} = \left(1 - \tau\lambda_k\right)\left(-\lambda_k\right)v^{(k)}$$

на втором слое получим

$$V_2 = V_1 + \tau\{V_1\}_{x\bar{x}} = \left(1 - \tau\lambda_k\right)v^{(k)} - \tau\lambda_k\left(1 - \tau\lambda_k\right)v^{(k)} = \left(1 - \tau\lambda_k\right)^2 v^{(k)}$$

Далее (21) доказывается по индукции.

Замечание. В соответствии с (21) решение задачи (23) на слое j имеет вид:

$$V_j = (0,(1-\tau\lambda_k)^j\, sin\,\pi kx_1,.(1-\tau\lambda_k)^j\, sin\,\pi kx_2,..(1-\tau\lambda_k)^j\, sin\,\pi kx_{n-1},0) \in R_{n+1}^{n-1}$$

Для того, чтобы при некотором $k \in \{1,...n\text{-}1\}$ решение имело свойства (19.1)-(19.2), необходимо и достаточно

$$\left|1 - \tau\lambda_k\right| < 1$$

где λ_k – собственное число задачи (9), соответствующее собственной функции $v^{(k)}$.

Теперь сформулируем определение устойчивости исходной разностной схемы (2.1)-(2.3) и получим условие ее устойчивости.

Определение. Явная разностная схема (2.1)-(2.3) на сетке (*n, m*) называется устойчивой, если при любом $k \in \{1,...n\text{-}1\}$ решение схемы (18.1)–(18.3) имеет свойства (19.1)-(19.2).

Таким образом, явная разностная схема (2.1)-(2.3) на сетке (*n, m*) называется устойчивой, если численая модель физического явления сохраняет некоторые существенные свойства дифференциальной модели того же явления.

Утверждение 6. Необходимым и достаточным условием устойчивости разностной схемы (2.1)-(2.3) на сетке (*n, m*) является выполнение неравенств

$$\left|1 - \tau\lambda_k\right| < 1 \qquad (22)$$

для всех $k = 1,\ldots n\text{-}1$.

Утверждение 7. Условие (6), а именно

$$0 < \tau < \frac{h^2}{2} \qquad (6)$$

гарантирует устойчивость схемы (2.1)-(2.3).

Доказательство. В силу (11.1) условия (22) эквивалентны условиям

$$0 < \tau < \frac{h^2}{2\,sin^2\left(\dfrac{\pi k}{2n}\right)}. \qquad (23)$$

которые должны выполняться для всех $k = 1,\ldots n\text{-}1$. Так как

$$0 < \tau < \frac{h^2}{2} < \frac{h^2}{2\,sin^2\left(\dfrac{\pi k}{2n}\right)}.$$

условие (6) гарантирует выполнение (22) для всех $k = 1,\ldots n\text{-}1$.

Комментарий к условию устойчивости[2]

Выясним, каким будет поведение решения задачи (18.1)-(18.3) при $k \geq n$.

Если k кратно n, решение (18) на нулевом слое (в узлах сетки) окажется нулевым. Действительно,

$$v_{i0} = sin\,\pi k x_i = sin(\pi k i h) = sin\frac{\pi k i}{n} = 0, i = 0,\ldots n$$

Из (18.1), (18.2) следует, что на каждом следующем слое решение остается нулевым: $v_{ij} = 0, i = 0,\ldots n, j = 1,2,3\ldots$ и свойства (19.1), (19.2) выполняются.

[2] При первом чтении данный пункт можно пропустить.

В общем случае для натуральных $k \geq n$ решение схемы (18.1)–(18.3) на начальном слое ($j = 0$) может быть разложено по базису из собственных функций задачи (9):

$$V_0 = sin\ \pi kx = \sum_{l=1}^{n-1} \alpha_l v^{(l)} = \sum_{l=1}^{n-1} \alpha_l\ sin(\pi lx) \tag{24}$$

Используя принцип суперпозиции, несложно показать, что решение на слое j запишется в виде

$$V_j = \sum_{l=1}^{n-1} \alpha_l (1 - \tau\lambda_l)^j v^{(l)} = \sum_{l=1}^{n-1} \alpha_l (1 - \tau\lambda_l)^j\ sin(\pi lx)$$

Таким образом, при натуральных $k \geq n$ наличие или отсутствие у решения задачи (18.1)-(18.3) свойств (19.1)-(19.2) зависит от выполнения условий $|1 - \tau\lambda_l| < 1$ для тех индексов $l \in \{1,...n-1\}$, для которых в разложении (24) $\alpha_l \neq 0$.

Утверждение 8. Условие (6), а именно

$$0 < \tau < \frac{h^2}{2} \tag{6}$$

гарантирует, что при любом натуральном k решение схемы (18.1)-(18.3) имеет свойства (19.1)-(19.2).

18.6. Теорема об устойчивости явной схемы по правой части и начальным условиям

На сетке размерности (n, m) расмотрим задачу

$$\begin{gathered} \frac{v_{ij+1} - v_{ij}}{\tau} = [v_{x\bar{x}}]_{ij} + f_{ij},\ i=1,\ldots n\text{-}1, j=0,\ldots m\text{-}1 \\ v_{0j} = 0,\ v_{nj} = 0,\ j = 1,\ldots m \\ v_{i0} = \varphi_i, i = 0,\ldots n\,. \end{gathered} \tag{25}$$

где через $[v_{x\bar{x}}]_{ij}$ обозначен разностный оператор

$$[v_{x\bar{x}}]_{ij} = \frac{v_{i-1j} - 2v_{ij} + v_{i+1j}}{h^2}\,.$$

Назовем (25) *второй вспомогательной задачей*.

Уравнения (25) являются уравнениями явной разностной схемы для решения дифференциального уравнения

$$u_t'(x,t) = u_{xx}''(x,t) + f(x,t) \text{ при } x \in (0, 1), t \in (0, T]$$

с нулевыми граничными условиями

$$u(0,t) = 0,\ u(1,t) = 0,$$

и начальным условием

$$u(x,0) = \varphi(x)\,.$$

Исследуем решение уравнений (25) безотносительно к решению указанного выше дифференциального уравнения.

Запишем (25) в векторном виде в пространстве R_{n+1}^{n-1}.

Решение (25) на слое j обозначим через V_j.

$$V_j = (v_{0j}, v_{1j}, ... v_{n-1j}, v_{nj}) \quad j = 0,...m.$$

Так как на каждом слое j решение v удовлетворяет нулевым граничным условиям, рассматриваем V_j как элемент пространства R_{n+1}^{n-1}:

$$V_j = (0, v_{1j}, ... v_{n-1j}, 0) \in R_{n+1}^{n-1} \quad j = 0,...m.$$

Определим Φ как элемент пространства R_{n+1}^{n-1}, отвечающий за начальное условие задачи (25):

$$\Phi = (\varphi_0, \varphi_1, ... \varphi_{n-1}, \varphi_n) = (0, \varphi_1, ... \varphi_{n-1}, 0) \in R_{n+1}^{n-1} \quad .$$

Здесь φ_0, φ_n введены «искусственно» и определены как $\varphi_0 = 0, \varphi_n = 0$,

Для каждого $j = 0,...m-1$ определим F_j как элемент пространства R_{n+1}^{n-1}, отвечающий за правую часть задачи (29) при отыскания решения на следующем слое j+1:

$$F_j = (f_{0j}, f_{1j}, ... f_{n-1j}, f_{nj}) = (0, f_{1j}, ... f_{n-1j}, 0) \in R_{n+1}^{n-1}$$

Здесь f_{0j}, f_{nj} ведены «искусственно» и определены как $f_{0j} = 0, f_{nj} = 0$,

Из (25) следует, что решение на слое j+1 можно найти на основе решения на – слое j (предыдущем слое):

$$v_{0j+1} = 0$$

$$v_{ij+1} = v_{ij} + \tau \frac{v_{i-1j} - 2v_{ij} + v_{i+1j}}{h^2} + \tau f_{ij}, \quad i=1,\dots n\text{-}1,$$

$$v_{nj+1} = 0.$$

С учетом введенных выше обозначения и свойств запишем (25) в виде

$$V_{j+1} = V_j + \tau\{V_j\}_{x\bar{x}} + \tau F_j, \quad j=0,...m\text{-}1 \qquad V_0 = \Phi. \tag{26}$$

где оператор $\{V_j\}_{x\bar{x}}$ определен в соответствии с (12.1)-(12.3).

Теорема (об устойчивости явной разностной схемы по правой части и начальным условиям). Пусть параметры задачи (26) соответствуют условию устойчивости (6). Тогда

$$\| V_{j+1} \|_{R_{n+1}^{n-1}} \le \| V_j \|_{R_{n+1}^{n-1}} + \tau \| F_j \|_{R_{n+1}^{n-1}} \tag{27}$$

Доказательство. Из (26) следует

$$\| V_{j+1} \|_{R_{n+1}^{n-1}} \le \| V_j + \tau\{ V_j \}_{x\bar{x}} \|_{R_{n+1}^{n-1}} + \tau \| F_j \|_{R_{n+1}^{n-1}} \tag{28}$$

Пусть разложение V_j по базису из собственных функций задачи (9) имеет вид:

$$V_j = \sum_{k=1}^{n-1} \alpha_k v^{(k)} \tag{29}$$

Тогда

$$\| V_j \|^2_{R^{n-1}_{n+1}} = \left(\sum_{k=1}^{n} \alpha_k v^{(k)}, \sum_{p=1}^{n} \alpha_p v^{(p)} \right)_{R^{n-1}_{n+1}} = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k^2 \left(v^{(k)}, v^{(k)} \right)_{R^{n-1}_{n+1}} \tag{30}$$

(в выкладках использовано Утверждение 3 об ортогональности выбранного базиса, то есть $\left(v^{(k)}, v^{(p)}\right)_{R^{n-1}_{n+1}} = 0$ при $k \neq p$).

В силу (29) и Утверждения 4 о свойствах оператора $\{V\}_{x\bar{x}}$

$$\{V_j\}_{x\bar{x}} = -\sum_{k=1}^{n} \alpha_k \lambda_k v^{(k)} \tag{31}$$

С учетом ортогональности выбранного базиса

$$\| V_j + \tau \{ V_j \}_{x\bar{x}} \|^2_{R^{n-1}_{n+1}} =$$

$$\left(\sum_{k=1}^{n-1} (\alpha_k v^{(k)} - \tau\lambda_k \alpha_k v^{(k)}), \sum_{p=1}^{n-1} (\alpha_p v^{(p)} - \tau\lambda_p \alpha_p v^{(p)}) \right)_{R^{n-1}_{n+1}} = \tag{32}$$

$$= \sum_{k=1}^{n-1} \left(1 - \lambda_k \tau\right)^2 \alpha_k^2 \left(v^{(k)}, v^{(k)} \right)_{R^{n-1}_{n+1}}$$

При выполнении условия устойчивости (6)

$$0 \le \left(1 - \lambda_k \alpha_k\right)^2 < 1, \ \ k = 1, \ldots n-1, \tag{33}$$

Поэтому для правых частей (30) и (32) верно

$$\sum_{k=1}^{n-1} \left(1 - \lambda_k \tau\right)^2 \alpha_k^2 \left(v^{(k)}, v^{(k)} \right)_{R^{n-1}_{n+1}} \le \sum_{k=1}^{n-1} \alpha_k^2 \left(v^{(k)}, v^{(k)} \right)_{R^{n-1}_{n+1}}, \tag{34}$$

откуда следует

$$\| V_j + \tau \{ V_j \}_{x\bar{x}} \|_{R^{n-1}_{n+1}} \le \| V_j \|_{R^{n-1}_{n+1}} \tag{35}$$

Подставим (35) в (28) и получим (27). Теорема доказана.

Следствие. Пусть параметры задачи (26) соответствуют условию устойчивости (6). Тогда

$$\| V_j \|_{R^{n-1}_{n+1}} \le \| \Phi \|_{R^{n-1}_{n+1}} + T \max_{l=0, j-1} \| F_l \|_{R^{n-1}_{n+1}}, \ j = 1, \ldots m. \tag{36}$$

Доказательство. Оценим решение на слое j, используя начальный слой:

$$
\begin{aligned}
&\left\| V_j \right\|_{R_{n+1}^{n-1}} \le \left\| V_{j-1} \right\|_{R_{n+1}^{n-1}} + \tau \left\| F_{j-1} \right\|_{R_{n+1}^{n-1}} \le \\
&\le \left\| V_{j-2} \right\|_{R_{n+1}^{n-1}} + \tau \left\| F_{j-2} \right\|_{R_{n=1}^{n-1}} + \tau \left\| F_{j-1} \right\|_{R_{n=1}^{n-1}} \le \ldots \\
&\le \left\| V_0 \right\|_{R_{n+1}^{n-1}} + \tau \sum_{l=0}^{j-1} \left\| F_l \right\|_{R_{n=1}^{n-1}} \le \\
&\le \left\| \Phi \right\|_{R_{n=1}^{n-1}} + \tau\ j \max_{l=0,\,j-1} \left\| F_l \right\|_{R_{n+1}^{n-1}}
\end{aligned}
\tag{37}
$$

Так как $\tau\ j \le \tau m = T$, следствие доказано.

18.7. Завершение доказательства сходимости

Вернемся к задаче (1.1)-(1.3) и разностной схеме (2.1)-(2.3).

Для погрешности z и погрешности аппроксимации ψ справедливы уравнения (5.1)-(5.3), вид которых соответствует (25)[3]. Чтобы применить Теорему об устойчивости или ее следствие и оценить z, запишем (5.1)-(5.3) в векторном виде, аналогичном (26).

Погрешность z на слое j обозначим через Z_j.

$$Z_j = (z_{0j}, z_{1j}, \ldots z_{n-1j}, z_{nj}),\ \ j = 0,\ldots m\,.$$

Так как на каждом слое j погрешность z удовлетворяет нулевым граничным условиям, Z_j рассматриваем как элемент пространства R_{n+1}^{n-1}:

$$Z_j = (0, z_{1j}, \ldots z_{n-1j}, 0) \in R_{n+1}^{n-1}\ ,\ j = 0,\ldots m.$$

Для каждого $j = 0,\ldots m-1$ определим Ψ_{j+1} как элемент R_{n+1}^{n-1}:

$$\Psi_{j+1} = (\psi_{0j+1}, \psi_{1j+1}, \ldots \psi_{n-1j+1}, \psi_{nj+1}) = (0, \psi_{1j+1}, \ldots \psi_{n-1j+1}, 0) \in R_{n+1}^{n-1}$$

Здесь ψ_{0j+1}, ψ_{nj+1} введены «искусственно и определены как $\psi_{0j+1} = 0, \psi_{nj+1} = 0$. Остальные компоненты $\psi_{ij+1}, i = 1,\ldots n-1$ являются компонентами погрешности аппроксимации ψ.

Поскольку начальное условие задачи (5.1)-(5.3) является нулевым, определим Φ как нулевой элемент пространства R_{n+1}^{n-1}:

$$\Phi = (\varphi_0, \varphi_1, \ldots \varphi_{n-1}, \varphi_n) = (0, 0, \ldots 0, 0) \in R_{n+1}^{n-1}\quad .$$

(можно считать, что все $\varphi_i, i = 0,\ldots n$ введены «искусственно»).

Используя введенные выше обозначения, запишем (5.1)-(5.3) в виде

$$
\begin{gathered}
Z_{j+1} = Z_j + \tau \{Z_j\}_{x\bar{x}} + \tau \Psi_{j+1},\ j=0,\ldots m\text{-}1 \\
Z_0 = \Phi = 0
\end{gathered}
\tag{38}
$$

[3] Начальное условие задачи (5.1)-(5.3) является нулевым.

Применим к задаче (38) Теорему об устойчивости и ее следствие – оценку (36). При выполнении условия (6) на шаг сетки для погрешности z на каждом слое $j = 1,\ldots m$, верна оценка

$$\left\| Z_j \right\|_{R_{n+1}^{n-1}} \le T \max_{l=1,j} \left\| \Psi_l \right\|_{R_{n+1}^{n-1}}, \tag{39.1}$$

где

$$\left\| Z_j \right\|_{R_{n+1}^{n-1}} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n-1} z_{ij}^2} \quad . \tag{39.2}$$

Для начального слоя $j = 0$ верно

$$\left\| Z_0 \right\|_{R_{n+1}^{n-1}} = \left\| \Phi \right\|_{R_{n+1}^{n-1}} = 0 \tag{39.3}$$

Так как в (39.1)

$$\left\| \Psi_l \right\|_{R_{n+1}^{n-1}} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n-1} \psi_{il}^2} \tag{39.4}$$

и для погрешности аппроксимации ψ справедливы оценки (4.3):

$$\begin{gathered} \left| \, \psi_{ij} \, \right| \le \hat{M}_1 h^2 + \hat{M}_2 \tau, \;\; i = 1,\ldots n-1, j = 1,\ldots m, \\ \hat{M}_1 = \frac{1}{12} \cdot \max_{(x,t)\in \overline{G}} \left| \, u_{xxxx}^{IV}(x,t) \right|, \;\; \hat{M}_2 = \frac{1}{2} \cdot \max_{(x,t)\in \overline{G}} \left| \, u_{tt}^{II}(x,t) \, \right|. \end{gathered} \tag{4.3}$$

где значения $\hat{M}_1$, $\hat{M}_2$ одинаковы для всех индексов *i, j,* указанных в неравенствах, и не зависят от размерности сетки, получим

$$\begin{gathered} \max_{l=1,j} \left\| \Psi_l \right\|_{R_{n+1}^{n-1}} \le \max_{l=1,j} \sqrt{\sum_{i=1}^{n-1} \psi_{il}^2} \le \max_{l=1,j} \left[\sqrt{n-1} \max_{i=1,n-1} \left| \psi_{il} \right| \right] \\ \le \sqrt{n-1} \max_{\substack{i=1,n-1, \\ l=1,j}} \left| \psi_{il} \right| \le \sqrt{n-1} \left(\hat{M}_1 h^2 + \hat{M}_2 \tau \right) \end{gathered} \tag{39.5}$$

Из (39.1), (39.5) следует

$$\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n-1} z_{ij}^2}{n-1}} \le T(\hat{M}_1 h^2 + \hat{M}_2 \tau), \; j = 1,\ldots m \, . \tag{7.1}$$

Из принадлежности Z_j пространству R_{n+1}^{n-1} следует

$$\begin{gathered} z_{0j} = 0, \; j = 1,\ldots m, \\ z_{nj} = 0, \; j = 1,\ldots m, \end{gathered} \tag{7.2}$$

Из (39.3) следует

$$z_{i0} = 0,\ i = 0,...n. \qquad (7.3)$$

Теорема о сходимости доказана.

Равенства (7.2), (7.3) можно было получить непосредственно из уравнений (5.2), (5.3).

ЛИТЕРАТУРА

а) литература по тематическому блоку

1. Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельков Г.М. Численные методы. – 7-е изд. М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2011. – 636 с.
2. Вержбицкий В.М. Основы численных методов. - М.: Высшая школа, 2002. – 840 с.
3. Марчук Г.И. Методы вычислительной математики. М.: Наука, 1980. – 536 с.
4. Самарский А.А. Теория разностных схем. М.: Наука, 1989. – 616 с.
5. Самарский А.А., Вабищевич П.Н. Численные методы решения задач конвекции-диффузии. – М.: Книжный дом «Либроком», 2015. – 248 с.
6. Самарский А.А., Вабищевич П.Н. Численные методы решения обратных задач математической физики. М.: Изд-во ЛКИ, 2014. – 480 с.
7. Самарский А.А., Гулин А.В. Численные методы математической физики. М.: Научный мир, 2000. – 316 с.
8. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. М.: Государственное издательство технико-теоретической литературы, 1953. – 680 с.
9. Стронгина Н.Р., Баркалов К.А. Численные методы. Семестр 8. ЭУК, учебно-методический комплекс. Фонд электронных образовательных ресурсов ННГУ. Н. Новгород, 2014. Ид.н. 831Е.14.08.
10. Параллельные вычисления: технологии и численные методы: Учебное пособие в 4-х томах. Авторы: Гергель В.П., Баркалов К.А., Мееров И.Б. и др. Том 4. – Нижний Новгород: Изд-во Нижегородского университета, 2013. – 369 с.

б) литература об организации учебного процесса по дисциплине

11. Садовничий В.А. Международный форум «Университеты, общество и будущее человечества». Доклад ректора МГУ имени М.В. Ломоносова академика В.А. Садовничего на Международном форуме «Университеты, общество и будущее человечества» 25 марта 2019 года. М.: Издательство Московского университета, 2019. – 36 с.
12. Высокопроизводительные параллельные вычисления. 100 заданий для расширенного лабораторного практикума. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2018. – 248 с.
13. Программы дисциплин по направлению «Прикладная математика и информатика». Учебно-методическое объединение Университетов. Учебно-методический совет по прикладной математике и информатике. М.: Изд-во факультета ВМиК МГУ, 2002. С. 59 – 62.
14. Стронгина Н.Р. Цифровизация и качество обучения на примере фундаментальной дисциплины «Численные методы» // Научные вести. 2021. №2 (31). – С. 85 – 103.

Наталья Романовна **Стронгина**

КУРС «ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ»

Анализ устойчивости и сходимости разностных схем методом разделения переменных

(Модуль 18)

Учебно-методическое пособие

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего образования «Национальный исследовательский
Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского».
603950, Нижний Новгород, пр. Гагарина, 23.